2.1.18 Příklady s $f(x)$

Předpoklady: 2111

Pedagogická poznámka: Tato lekce nezapadá zcela do normálního průběhu vyučování, ale zjistil jsem, že studenti mají poměrně značné problémy (spíš psychického rázu) s příklady, ve kterých se vyskytují zápisy typu $f(x+1)$. Nic převratného se studenti nenaučí, ale na tyto zápisy si zvyknou. Časem se jim to bude hodit.

Krátké opakování:
Lineární funkce $y = ax + b$, hodnoty se mění stále stejně rychle, konstanta a udává sklon grafu a tedy i to, jak rychle se mění hodnoty funkce.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Př. 1: Je dána lineární funkce $y = f(x) = 2x - 1$.
a) Urči $f(x)$ pro $x = \left\{-10; -\sqrt{7}; 0; 1968\right\}$.
b) Urči $f(x+1)$ pro $x = \{-4;10\}$.
c) Pro $x = 2$ urči $f(x)$, $f(x+3)$, $f(x-1)$ a $f(2x)$.

a) Urči $f(x)$ pro $x = \left\{-10; -\sqrt{7}; 0; 1968\right\}$.

$f(-10) = 2(-10) - 1 = -21$

$f\left(-\sqrt{7}\right) = 2\left(-\sqrt{7}\right) - 1 = -2\sqrt{7} - 1$

$f(0) = 2(0) - 1 = -1$

$f(1968) = 2(1968) - 1 = 3936 - 1 = 3935$

b) Urči $f(x+1)$ pro $x = \{-4;10\}$.

$f(-4+1) = f(-3) = 2(-3) - 1 = -7$

nebo $f(x+1) = 2(x+1) - 1 = 2(-4+1) - 1 = -7$

$f(10+1) = f(11) = 2(11) - 1 = 21$

c) Pro $x = 2$ urči $f(x)$, $f(x+3)$, $f(x-1)$ a $f(2x)$.

$f(x) = 2x - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

$f(x+3) = 2(x+3) - 1 = 2(2+3) - 1 = 9$

$f(x-1) = 2(x-1) - 1 = 2(2-1) - 1 = 1$

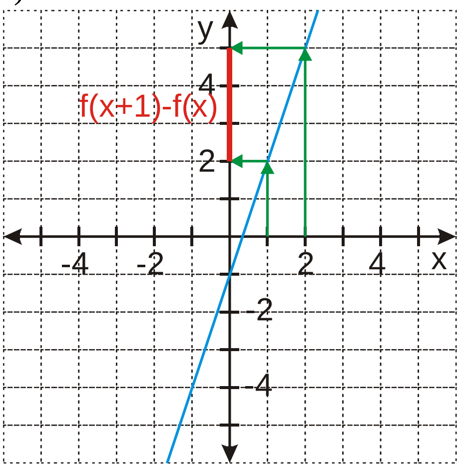
$f(2x) = 2(2x) - 1 = 2(2 \cdot 2) - 1 = 7$

Pedagogická poznámka: Část a) studenti spočítají bez problémů, v části b) naopak problémy často mají. Není nutné jim rovnou prozrazovat, jak mají hodnoty spočítat, naprosté většině stačí, když jim připomenete, že mají **trvat na důsledném a opatrném dosazování** (dodržování pravidel) a vyhnout se odhadování výsledků.

Př. 2: a) Urči rozdíl $f(x+1)-f(x)$ u funkce $y=3x-1$ pro $x=1$ a pro $x=5$.
b) Porovnej předchozí výsledky a předpis funkce.
c) Nakresli graf funkce $y=3x-1$ a vyznač do ní rozdíl $f(x+1)-f(x)$ pro $x=1$. Jak se obrázek změní pro jinou hodnotu *x*?
d) Spočti hodnotu $f(x+1)-f(x)$ u funkce $y=3x-1$ pro libovolné *x*.
e) Spočti hodnotu $f(x+1)-f(x)$ pro obecnou lineární funkci $y=ax+b$.

a)
$x=1$
$$f(x+1)-f(x)=[3(x+1)-1]-[3x-1]=[3(1+1)-1]-[3\cdot1-1]=5-2=3$$
$x=5$
$$f(x+1)-f(x)=[3(x+1)-1]-[3x-1]=[3(5+1)-1]-[3\cdot5-1]=17-14=3$$

b)
Hodnoty rozdílu $f(x+1)-f(x)$ jsou v obou případech stejné a rovnají se konstantě *a* v předpisu funkce.

c)


Když změníme hodnotu *x*, posuneme se po přímce jinam, ale hodnota $f(x+1)-f(x)$ se nezmění.

d)
$$f(x+1)-f(x)=[3(x+1)-1]-[3x-1]=3x+3-1-3x+1=3$$
Hodnota je opravdu stále stejná a rovná se parametru *a* v předpisu funkce.

e)
$$f(x+1)-f(x)=[a(x+1)+b]-[ax+b]=ax+a+b-ax-b=a$$
Platí u všech lineárních funkcí.

Pedagogická poznámka: Hned v bodě a) část studentů ztroskotá na tom, že se snaží udělat všechno na jednou. Pokud ji poradíte, aby nejdříve spočítali $f(x)$, pak $f(x+1)$ a pak rozdíl (ve skutečnosti, jde o převedení na předchozí příklad), zvládnou to sami a příště si snad uvědomí že je důležité, aby v každém okamžiku věděli, co vlastně počítají.
U bodů d) a e) stačí opatrné dosazení.

Předchozí výsledky jsou samozřejmé,
protože: $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=\frac{f(x+1)-f(x)}{1}=f(x+1)-f(x)$.

Př. 3: Je dána obecná lineární funkce $y=ax+b$. Urči rozdíly:
a) $f(x+2)-f(x)$,
b) $f(x)-f(x-1)$,
c) $f(x+3)-f(x-1)$.

Výsledky můžeme psát z paměti nebo je vypočítat ze vzorce $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

a) $f(x+2)-f(x)$
$\Delta x=x+2-x=2$
$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+2)-f(x)}{2}\Rightarrow f(x+2)-f(x)=2a$

b) $f(x)-f(x-1)$
$\Delta x=x-(x-1)=1$
$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x-1)}{1}\Rightarrow f(x)-f(x-1)=a$

c) $f(x+3)-f(x-1)$
$\Delta x=x+3-(x-1)=4$
$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+3)-f(x-1)}{4}\Rightarrow f(x+3)-f(x-1)=4a$

Př. 4: Urči předpis lineární funkce, pokud víš, že platí: $f(x)-f(x-2)=3$ a $f(1)=1$.

Více možností, jak příklad vyřešit.
$f(1)=1\Rightarrow$ dvojice x, y $[1;1]$, druhou dvojicí dopočítáme
$f(x)-f(x-2)=3\Rightarrow f(x-2)=f(x)-3$
$f(x-2)=f(x)-3$ dosadíme $x=1$ (tam už hodnotu známe)
$f(1-2)=f(1)-3$
$f(-1)=1-3=-2\Rightarrow$ druhá dvojice x, y $[-1;-2]$

Sestavíme soustavu rovnic:
$[1;1] \Rightarrow 1 = a \cdot 1 + b$
$[-1;-2] \Rightarrow -2 = a(-1) + b$
vyjádříme b z první rovnice $1 - a = b$
dosadíme do druhé rovnice: $-2 = -a + b = -a + 1 - a$
$-3 = -2a$
$a = \frac{3}{2}$
$b = 1 - a = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$
Jde o funkci $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

Zkusíme to jinak:
$f(x) - f(x-2) = 3$
Co znamená $f(x) - f(x-2) = ax + b - [a(x-2) + b] = ax + b - (ax - 2a + b) = 2a$.
Dosadíme $f(x) - f(x-2) = 3 = 2a \Rightarrow a = \frac{3}{2}$
Funkce prochází bodem $[1;1] \Rightarrow 1 = a \cdot 1 + b \Rightarrow 1 = \frac{3}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

Funkce $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

Ještě jinak.
$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$\Delta y = f(x) - f(x-2) = 3$
$\Delta x = x - (x-2) = 2$
$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2}$ a dál už je to stejné jako před tím.

Př. 5: Pro lineární funkci $f(x)$ platí: $f(x+3) - f(x) = 2$ a $f(1) = \frac{1}{2}$. Bez toho, že bys určil její předpis, zjisti hodnoty pro $x = 0$ a $x = 5$.

$f(x+3) - f(x) = 2$, když se x zvětší o 3 zvětší se y o 2 $\Rightarrow a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}$.
Známe $f(1) = \frac{1}{2}$.
Chceme $f(0)$, hodnotu pro x zmenšené o 1. Když zmenšíme x o jedna, zmenší se y o a.
$f(0) = f(1) - a = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$
Známe $f(1) = \frac{1}{2}$.
Chceme $f(5)$, hodnotu pro x zvětšené o 4. Když zmenšíme x o čtyři, zmenší se y o $4a$.

$$f(5) = f(1) + 4a = \frac{1}{2} + 4\frac{2}{3} = \frac{19}{6}$$

Poznámka: (pro studenty): Nemá cenu se tuto hodinu učit nazpaměť. Pokud Vám nepřijdou vztahy mezi $f(x+1) - f(x)$ a a zcela samozřejmé, radši ji vynechejte. Časem bude možná pochopitelnější.

Př. 6: Petáková:
strana 27/cvičení 32

Shrnutí: Předpis funkce $y = f(x)$ nám umožňuje spočítat hodnotu nejen pro *x*, ale pečlivým dosazením i pro jiné hodnoty neznámé ($x+1,\ 2x,\ \ldots$).